Εξέταση Ιανουαρίου 2021 - Εισαγωγή στην Τοπολογία (Α. Τόλιας)

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Μσς)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Πρόκειται για 6 θέματα επιλογής όπου στο καθένα μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία σωστές επιλογές και 4 θέματα ανάπτυξης των οποίων η απάντηση δίνεται με το πληκτρολόγιο του υπολογιστή. Όλα τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.

Ανάπτυξης 1. Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και A ένα μη κενό υποσύνολο του X. Πότε καλείται το σύνολο A φραγμένο; Να αποδείξετε ότι αν το σύνολο A είναι φραγμένο τότε για κάθε $y \in X$, υπάρχει $R > 0$ ώστε $A \subseteq B_\rho(y,R)$ (όπου $B_\rho(y,R)$ η ανοικτή μπάλα κέντρου y και ακτίνας R).

Ανάπτυξης 2. Έστω $X = \{a,b,c\}$ και $d\colon X\times X \to \mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} &d(a,a)=1, \quad && d(a,b)=2, \quad && d(a,c)=3,\\ &d(b,a)=2, && d(b,b)=0, && d(b,c)=4,\\ &d(c,a)=3, && d(c,b)=6, && d(c,c)=0. \end{aligned}$$

Εξηγήστε γιατί η d δεν είναι μετρική και γιατί αν αλλάξουμε μια οποιαδήποτε από τις παραπάνω εννιά τιμές δεν μπορούμε να την καταστήσουμε μετρική. Έπειτα, δείξτε πως αλλάζοντας δύο (ποιες δύο και ποιες τιμές πρέπει να δώσουμε;) από τις εννιά τιμές τηε d μπορούμε να την καταστήσουμε μετρική. Εξηγήστε λεπτομερώς.

Ανάπτυξης 3. Σωστό ή Λάθος;
« Αν η $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση και A ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το $f(A)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$». Αν η παραπάνω πρόταση είναι σωστή να την αποδείξετε αλλιώς αν είναι λάθος να δώσετε αντιπαράδειγμα.

Ανάπτυξης 4. Αν M είναι ο αριθμός $M = 4x+2$ όπου x το τελευταίο ψηφίο από τον αριθμό μητρώου σας, να βρείτε ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική που να έχει ταυτόχρονα όλες τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $\sup A = M$

(β) $\inf A = -M$

(γ) $M \in A$

(δ) $-M \in A$

(ε) $A^o = \left(-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}\right)$

(στ) $\overline{A} = \left[-M, \frac{M}{2}\right] \cup \{M\}$

Ερώτηση 5. Έστω (X,ρ) ένας διακριτός μετρικός χώρος και A ένα μη κενό υποσύνολο του X και $x \in X$. Τότε, μπορούμε να συμπεράνουμε με βεβαιότητα ότι:

(i) Αν το σύνολο A είναι άπειρο τότε μια βασική ακολουθία στο A δεν είναι συγκλίνουσα.

(ii) Αν $x \in \overline{A}$ τότε $x \in A^o$.

Only Maths -Official-

(iii) Αν το συμπλήρωμα του A είναι επίσης μη κενό, τότε $\rho(A, X \setminus A) \geq 1$.

(iv) Αν το A είναι πεπερασμένο, τότε το A είναι συμπαγές.

Ερώτηση 6. Στο $\mathbb{R}^2$ με την ευκλείδεια μετρική, θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Τότε:

(i) Το A είναι συμπαγές.

(ii) Το A είναι συνεκτικό.

(iii) Κάθε σημείο του A είναι και σημείο συσσώρευσης του A.

(iv) Κάθε σημείο συσσώρευσης του A ανήκει στο A.

(v) Το σημείο $\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right), \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$ ανήκει στο εσωτερικό του A.

(vi) Το σημείο $\left(\cos\left(\frac{\pi}{17}\right), \sin\left(\frac{\pi}{17}\right)\right)$ ανήκει στην κλειστή θήκη A.

Ερώτηση 7. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και $f\colon X \to X$ μία συνεχής συνάρτηση. Τότε μπορούμε να συμπεράνουμε με βεβαιότητα ότι:

(i) για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X και κάθε $x \in X$, αν $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x)$, τότε $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

(ii) για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X και κάθε $x \in X$, αν $x_n \xrightarrow{\rho} x$ τότε $f(f(x_n)) \xrightarrow{\rho} f(f(x))$.

(iii) για κάθε ανοικτό σύνολο $A \subseteq X$ το $f(A)$ είναι επίσης ανοικτό.

(iv) για κάθε ανοικτή μπάλα του X, η αντίστροφη εικόνα της μέσω της f είναι επίσης ανοικτή μπάλα του X.

(v) για κάθε κλειστό υποσύνολο του X, η αντίστροφη εικόνα του μέσω της f είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Ερώτηση 8. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Τότε μπορούμε να συμπεράνουμε με βεβαιότητα ότι:

(i) αν υπάρχουν δύο μη κενά κλειστά υποσύνολα A, B του X με $A \cap B = \emptyset$ και $A \cup B = X$, τότε ο X δεν είναι συνεκτικός.

(ii) αν υπάρχουν δύο μη κενά υποσύνολα A, B του X με $A \cap B = \emptyset$ και $A \cup B = X$ ώστε το A να είναι ανοιχτό και το B να είναι κλειστό, τότε ο X δεν είναι συνεκτικός.

(iii) αν $A \subseteq B \subseteq X$ και το B είναι συμπαγές, τότε και το A είναι συμπαγές.

(iv) αν υπάρχουν δύο υποσύνολα A, B του X ώστε $B \neq \emptyset$, $A \neq X$ και $A^o = \overline{B}$, τότε ο X δεν είναι συνεκτικός.

Ερώτηση 9. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος, A ένα συμπαγές υποσύνολο του X και B ένα πλήρες υποσύνολο του X. Τότε, μπορούμε να συμπεράνουμε με βεβαιότητα ότι:

(i) για κάθε βασική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A υπάρχει $x \in A$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

Only Maths Official

(ii) για κάθε βασική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο B υπάρχει $x \in B$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

(iii) για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $x \in A$ ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$.

(iv) για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο B υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $x \in B$ ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$.

(v) το $A \cap B$ είναι συμπαγές.

(vi) το $A \cap B$ είναι πλήρες.

Ερώτηση 10. Ας είναι (X, ρ) ένας μετρικός χώρος, δύο μη κενά σύνολα A και $B = X \setminus A$ στον X ώστε A πυκνό και B όχι πυκνό. Τότε, μπορούμε να συμπεράνουμε με βεβαιότητα ότι:

(i) Το A είναι κλειστό.

(ii) Το B είναι κλειστό.

(iii) Το A όχι κλειστό.

(iv) Το B όχι κλειστό.

(v) Το A είναι ανοικτό.

(vi) Το B είναι ανοικτό.

(vi) Το A όχι ανοικτό.

(vi) Το B όχι ανοικτό.

(vi) Κανένα από τα παραπάνω

Only Maths
-Official-